



Mathematical Modeling of a Quadricopter for Functional Simulation

Gerardo Chacon, Tito González and Victor Arias

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

January 16, 2019

MODELADO MATEMÁTICO DE UN CUADRICÓPTERO PARA SIMULACIÓN FUNCIONAL

Resumen- Los artefactos aéreos con cuatro, o más, rotores horizontales han sido objeto de una acelerada evolución en los últimos años. Grupos de investigación en el área de ingeniería de sistemas, estudiantes de ingeniería de control, y aficionados en general se encuentran trabajando para lograr la implementación de modelos y controladores más robustos, de manera tal que se pueda trabajar con simulaciones más detalladas, precisas, y por tanto más realistas en el comportamiento de los cuatrirotores. Muchos autores pensando a futuro en una implementación práctica y limitada en potencia de cálculo por la impuesta ligereza en peso, optan por mantener relativamente simple el modelado de la dinámica del vehículo lo cual hace posible controlar al cuadrirotor utilizando técnicas de control clásico de los sistemas lineales como el PID, por medio de la linealización de la dinámica de comportamiento del dispositivo alrededor de un punto de operación que usualmente se escoge según donde el artefacto deba rondar. Sin embargo, el vuelo de rango amplio o con maniobras más complejas exige un mejor desempeño del sistema de control, necesidad que solo puede ser lograda por la utilización de las técnicas de control no lineal, ya que estas consideran una forma más general de la dinámica del vehículo en todas las zonas de vuelo, pero estas implican a su vez un modelo más completo del artefacto aéreo.

Palabras Clave-- Cuadricóptero, Modelado Matemático, Espacio de Estado, Linealización, Simulación.

I. INTRODUCCIÓN

El cuadricóptero es un artefacto volador que puede modificar su posición y su orientación por medio de cuatro rotores o hélices que son controladas en su rotación de manera independiente y que en suma de sus acciones proveen la actuación en esta clase de vehículos aéreos.

En cuanto al campo universitario, se busca expandir su capacidad de maniobrabilidad en la teleoperación, autonomía, e inteligencia [1] con el fin de poder utilizarlo en operaciones de vigilancia o reconocimiento, inspección de instalaciones y estructuras, mapeo de terrenos [2], búsqueda y rescate [3], combate de incendios, o como un elemento dentro de un grupo que debe dar cumplimiento a una tarea de propósito general [4].

Sin embargo, existen varios problemas operativos que tienen que ser resueltos o mejorados para poder utilizarlos en aplicaciones reales. Uno de estos problemas es el hecho de que como artefacto aéreo y en términos de la Ingeniería Aeronáutica es un sistema altamente no-lineal y multivariable, ya que posee

seis grados de libertad, tres para la posición (x, y, z), tres para la orientación (viraje, elevación, rotación), y solo cuatro actuadores, con lo cual se transforma en un sistema no holonómico. Es decir, es un sistema subactuado [5] o que posee un número menor de salidas de control en relación a los grados de libertad y por tanto no puede moverse de manera traslativa sin antes rotar sobre uno de sus ejes.

La anterior condición operativa, hace al cuadricóptero un sistema inestable por naturaleza (lazo abierto) y de muy difícil control debido al acoplamiento no lineal entre los actuadores y los grados de libertad [6]. Es por estas condiciones que es un proyecto de mucho interés en el área de ingeniería de control, ya que la regulación de la posición, la regulación de la orientación, junto con la regulación de las velocidades lineales y angulares exige una robusta arquitectura de control, ya que es indispensable coordinar el funcionamiento de los cuatro rotores a un mismo tiempo para poder cumplir con las exigencias de la maniobra de vuelo.

A este respecto debe indicarse que el modelado matemático del cuadrirotor consiste en la descripción de su dinámica de cuerpo rígido, la cinemática con respecto a los marcos de referencia, fijos y del vehículo, y de las fuerzas aplicadas al cuadrirotor durante las maniobras. En función de lo anterior se hace necesario indicar que existen varios métodos para determinar el modelo del artefacto. En primer lugar, estos pueden variar en la descripción de la dinámica de cuerpo rígido, ya que esta puede ser determinada por medio de las ecuaciones de Euler [7], o por medio de la aproximación de Euler-Newton [8], o por medio de la aproximación de los Lagrangianos [9]. En segundo lugar, estos pueden variar en la representación final de la cinemática y la dirección del eje 'z' del marco de referencia del artefacto.

II. ANTECEDENTES

De las diversas revisiones se aprecia que muchos autores optan por mantener relativamente simple el modelado de la dinámica del vehículo lo cual hace posible controlar al cuadrirotor utilizando técnicas de control clásico de los sistemas lineales como el PID como se indica en los trabajos de Hoffmann et al [10], Goela et al [11], Erginer et al [12], Jategaonkar [13], Cowling et al [14], Bouabdallah et al [15], y Pounds et al [16],

por medio de la linealización de la dinámica de comportamiento del dispositivo alrededor de un punto de operación que usualmente se escoge según donde el artefacto deba rondar. Sin embargo, el vuelo de rango amplio o con maniobras más complejas exige un mejor desempeño del sistema de control, necesidad que solo puede ser lograda por la utilización de las técnicas de control no lineal.

Por otra parte, la necesidad de un modelo no lineal preciso de la dinámica del cuadrirotor puede ser satisfecha por medio de la utilización de métodos adaptativos que puedan reaccionar ante la perturbación y corregir los errores en las estimaciones de los parámetros del modelo por medio del ajuste de los parámetros ante situaciones adversas. En ese sentido, métodos como el Control Adaptativo por Referencia del Modelo propuesto por Whitehead et al [17] podrían ser utilizados para tal fin.

Trabajos recientes en la búsqueda de la autonomía operativa de un dispositivo cuadrirotor utilizaron métodos adaptativos indirectos basados en los mínimos cuadrados para el problema de la masa del vehículo. Sin embargo, todos los métodos indirectos basados en las diferencias entre las salidas esperadas y las actuales de la planta corrigen los errores en los parámetros, pero no lo hacen de manera explícita en los parámetros del modelo, como sí lo hacen los métodos adaptativos directos sugeridos por Craig et al [18] para los manipuladores mecánicos robóticos.

En el trabajo presentado por Becker et al [19], se desarrolla una herramienta computacional diseñada específicamente para simular la dinámica del OS4 la cual se implementa en MATLAB por medio del Simulink. El programa permite la prueba de respuesta de diversos sensores y filtros para las señales generadas, así como varias técnicas de control. Este ambiente de simulación fue específicamente utilizado, en este caso, para probar la capacidad de evasión de obstáculos utilizando sensores por ultrasonido.

Con el objetivo de diseñar un helicóptero cuadrirotor práctico, Pounds et al [20] crean el “X-4 Flyer Mark II” el cual es una plataforma cuadrirotor estructuralmente robusta con armazón y aviónica construida a la medida y capacidad de carga de hasta 4 kg. Tiene la particularidad de que el diseño y construcción de las propelas es aero-elástico y se dan a conocer los resultados de desempeño de esta característica. Como tal, el cuadrirotor incluye en los rotores balanceo por resortes lo cual permite el ajuste de las características de batido de la pala. Efecto que también se incluye en el modelado dinámico del artefacto desarrollado en MATLAB y de cuyas simulaciones se depende que la configuración y funcionamiento inverso de las propelas es beneficioso para el vuelo del cuadrirotor.

Por otra parte, Mokhtari et al [21] presentan una linealización mixta por realimentación robusta con controlador lineal GH^∞ aplicado a las no linealidades del cuadrirotor. La

saturación de los actuadores y las restricciones en las salidas del espacio de estado se implementaron para analizar el escenario del peor caso en el diseño de las leyes de control.

En el trabajo presentado por Courses et al [22], se desarrolla el modelo matemático, totalmente dinámico, de un cuadrirotor comercialmente disponible al público en general y presentan su desempeño a poca altura bajo un esquema de control por modo deslizante, la cual es una técnica conocida por su robustez en mantener el punto de operación a pesar de las perturbaciones y variaciones durante la operación. La planta fue modelada de manera no lineal y con variables de estado fuertemente acopladas.

III. PRINCIPIOS DE OPERACIÓN DEL CUADRIROTOR.

En un cuadrirotor, cada rotor y su propela asociada es responsable de cierta cantidad de empuje en el eje vertical (u_z , Figura 1) y par torsor sobre su centro de rotación en el plano horizontal de ubicación (plano u_x, u_y , Figura 1), así como de cierta fuerza de arrastre opuesta a la dirección de vuelo por los efectos de la velocidad de desplazamiento sobre el perfil aerodinámico.

En cuanto a las cuatro propelas, asociadas a cada rotor, estas no son todas iguales. De hecho, estas se dividen en dos pares, dos que empujan por girar a derechas y dos que halan por rotar a izquierdas, es decir, un par rota y el otro par contrarota. Como consecuencia, el torque resultante en el plano horizontal de ubicación puede ser nulo si todas las propelas giran con idéntica velocidad angular, lo cual le permite a este tipo de vehículo aéreo permanecer en la misma posición y sobre su centro de gravedad. Véase la Figura 1.

Con el objeto de determinar la orientación o postura del aeroplano en torno a su centro de masa, se definen tres parámetros dinámicos identificados como los ángulos: Viraje o Giro (Yaw), Cabeceo o Elevación (Pitch), y Rotación o Inclinación (Roll), los cuales se muestran en la Figura 1.

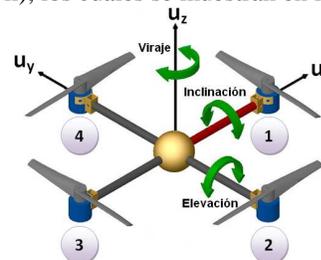


Figura 1 Ángulos de rotación del Cuadrotor.

En cuanto al cuadrirotor, según se aprecia en la Figura 2, los cambios en el valor del ángulo de elevación se logran por la variación en la velocidad de rotación entre las propelas 1 y 3, manteniendo constante la velocidad de las propelas 2 y 4, lo cual resulta en la traslación hacia atrás, Figura 2a, o hacia adelante, Figura 2b.

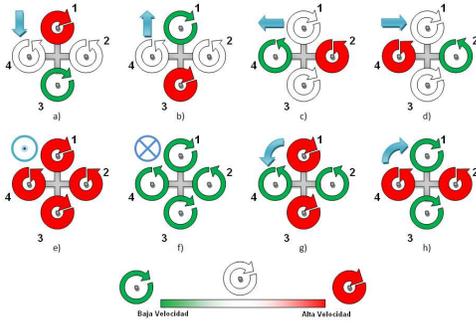


Figura 2 Algunas acciones para movimiento simple del Cuadrirotor.

Como se puede inferir al observar la Figura 2 en su conjunto, los helicópteros cuatrirrotor no requieren rotor de cola ni requieren control en el ángulo de ataque de las palas de los rotores para el desarrollo de maniobras aéreas, ya que esta funcionalidad de controlar de manera independiente la velocidad de rotación de cada una de las hélices, aparte de incrementar o decrementar el empuje vertical, permite cambiar el par de torsión aplicado sobre el cuerpo principal, con lo cual se elimina la necesidad de un par de torsión adicional para controlar los virajes.

A. Sistema de Coordenadas.

Cuando un cuadricóptero está navegando por un espacio tridimensional lo hace en dos sistemas de coordenadas diferentes. Uno de estos sistemas es el de coordenadas del vehículo, con supra índice "B", que está afectado por el empuje desarrollado por los rotores. El otro, es el marco de navegación con subíndice "E", donde fuerzas como la gravitacional tienen representación en su influencia.

En ese sentido, para poder desarrollar el modelo matemático del cuadricóptero se hace imprescindible definir primero los sistemas de coordenadas con los cuales se pueda describir los movimientos del vehículo aéreo. Estos dos sistemas según Beard [23] son:

- ▶ Sistema de coordenadas inercial o de navegación (fijado en la tierra, F^E).
- ▶ Sistema de coordenadas móvil o del cuerpo (fijado en el vehículo, F^B).

Donde algunas propiedades físicas del cuadricóptero como: inclinación, elevación, viraje, velocidad angular pueden ser son medidas en F^E , mientras que otras propiedades como la aceleración lineal puede ser cuantificada en F^B .

F^E es el sistema inercial de coordenadas de navegación y es el punto de referencia para el artefacto. Este sistema de coordenadas de referencia puede ser colocado donde sea conveniente, pero una vez establecido debe quedar fijo en cuanto el cuatrirrotor comienza a moverse.

Como tal, F^E se rige por la regla de la mano derecha

tanto en la definición de los ejes como en el producto vectorial, y donde la dirección positiva del eje Z_E es en la dirección desde la tierra, contraria al efecto de la aceleración de la gravedad (vector unitario u_z , Figura 1). Usando este mismo sistema se define la posición del cuadricóptero ζ y su postura η .

El eje Z_B es perpendicular a los ejes X_B y Y_B y su dirección positiva es en la dirección de las fuerzas de empuje de los propulsores. En este sistema de coordenadas se determinan las velocidades lineales V^B , las velocidades angulares ω^B , las fuerzas f^B y los pares de torsión τ^B .

En esa misma idea, la posición del cuadricóptero está definida según el vector ζ , como se indica en (1) entre los orígenes de F^E y F^B . Véase la Figura 3, donde:

$$\zeta = [X_{E'}, Y_{E'}, Z_{E'}]^T \quad (1)$$

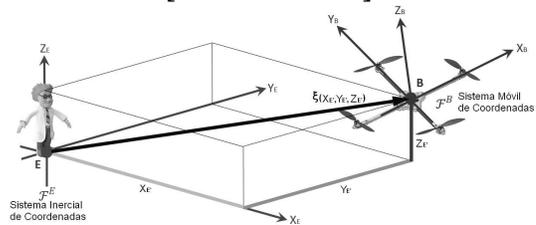


Figura 3 Sistemas de coordenadas de referencia.

mientras que la postura del cuadricóptero, η , está definida según la orientación en F^B con respecto del sistema F^E como se indica en (2). Para obtener la orientación del cuadricóptero en términos de sus ángulos, el sistema de coordenadas del artefacto tiene que ser enlazado con el sistema de coordenadas de navegación y la manera de lograr esto es con la implementación de los ángulos de Euler. Es decir, la orientación está definida según tres rotaciones consecutivas en torno al sistema de ejes coordenados F^E , donde se definen los valores de inclinación (ϕ), elevación (θ), viraje (ψ). Véase la Figura 4, donde:

$$\eta = [\phi, \theta, \psi]^T \quad (2)$$

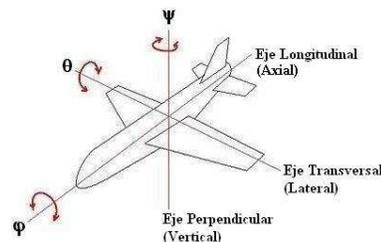


Figura 4 Ejes de rotación de cualquier aeronave.

En cuanto a las ecuaciones de movimiento del vehículo, es más adecuado formularlas en el sistema definido por F^B por diversas razones, entre ellas: la matriz de inercia del sistema es invariante en el tiempo, las ecuaciones de sistema se simplifican a causa de la simetría en la armazón del cuadricóptero, las mediciones de la sensórica son fácilmente convertibles al sistema de coordenadas de referencia F^B , con lo cual se simplifican las variables en las ecuaciones de control.

B. Ángulos de Euler.

Los ángulos de Euler son tres ángulos introducidos por Leonard Euler para describir la orientación de un cuerpo rígido en el espacio con respecto a un punto de referencia en ese mismo espacio. De manera general, para describir la orientación de un objeto en un espacio Euclidiano se requieren tres parámetros Z Y X , los cuales pueden ser dados de diversas maneras aunque en aviónica se prefieren los ángulos de Euler [24]. Véase la Figura 4.

Estos, también pueden ser utilizados para describir la orientación de un marco o sistema de coordenadas de referencia, relativo a otro y su transformación en las coordenadas de un punto en un marco A en las coordenadas del mismo punto espacial en otro marco de referencia, B . Los ángulos de Euler se denotan típicamente como: $\phi \in]-\pi, \pi]$, $\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\psi \in]-\pi, \pi]$.

Un aspecto muy importante de los ángulos de Euler es que representan una secuencia de tres rotaciones elementales sobre ejes distintos, de manera tal que cualquier orientación puede ser obtenida por la composición de estas tres rotaciones elementales, como se indica en (3). Obviamente, estas rotaciones inician en una orientación comúnmente conocida como indica Lee et al [25].

De manera tal que las coordenadas inerciales de posición y las coordenadas de referencia del cuerpo se encuentran relacionadas por la matriz de rotación tridimensional, que es lo equivalente a la multiplicación de las matrices de rotación de cada eje como se muestra en (3).

$$R_B^E = R_{xyz}(\phi, \theta, \psi) = R_x(\phi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_z(\psi) \quad (3)$$

Como se indica en (3), esta matriz proporciona la conversión desde el cuadricóptero al marco de navegación. Aunque también puede ser necesario en algunos casos realizar la transformación desde el marco de navegación al marco del vehículo, lo cual puede ser logrado sin mayor problema al realizar la transposición de la matriz de rotación como se indica en (4).

$$R_E^B = \left[R_B^E \right]^T \quad (4)$$

IV. MODELADO MATEMÁTICO DEL SISTEMA.

El concepto seguido en este trabajo para el modelado dinámico fue el de escribir las ecuaciones físicas del sistema, obtener los parámetros de relevancia para el desarrollo del modelo computacional e identificar solamente la dinámica de los actuadores (propelas), que son los de mayor importancia para el caso del cuadrirotor. Con esta aproximación, se hace un poco más fácil la determinación y construcción computacional de los modelos dinámicos de sistemas inestables, ya que no es posible

realizar la identificación de parámetros en lazo cerrado durante el vuelo del vehículo. El formalismo de las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de un motor de corriente continua comercial se utiliza para modelar con la mayor precisión plausible una posible maqueta de trabajo. El formalismo de las ecuaciones de Newton-Euler, la identificación de modelos, los elementos aerodinámicos de las palas en rotores comerciales, y la teoría de momentos se utilizan para modelar un cuadrirotor que sea factible de construir. En cualquier caso, el modelo que se pretende desarrollar tiene las siguientes consideraciones:

- ▶ La estructura o cuerpo del dispositivo se asume que es rígida.
- ▶ El cuerpo de la estructura tiene simetría longitudinal y transversal.
- ▶ Hay coincidencia entre el centro de gravedad y el origen de los ejes de simetría.
- ▶ Las propelas son rígidas.
- ▶ El empuje y el arrastre de las propelas son proporcionales al cuadrado de la velocidad angular de esta.

Los dispositivos aéreos bajo el principio de sustentación tipo helicóptero son sistemas mecánicos de elevada complejidad que reúnen numerosos efectos físicos resultantes de la aerodinámica y del dominio de la mecánica [26]. Uno de los efectos principales que se debe considerar el modelado del cuadrirotor es el giroscópico, tanto por la rotación de las hélices como por la rotación del conjunto durante la realización de las maniobras de vuelo según lo establecido por Mullhaupt [27].

A. Matriz de Rotación, Consideración Aeronáutica.

Como se indicó anteriormente, la rotación de un cuerpo rígido en el espacio puede ser parametrizada utilizando los Ángulos de Euler. Sin embargo, existen otros métodos como: Cuaternios o los ángulos de Tait-Bryan [28] más adecuados para su aplicación en una aeronave real.

En particular, considerando un sistema de coordenadas orientado según la regla de la mano derecha, las tres rotaciones más simples que se pueden hacer de manera individual y separada se pueden representar por:

- ▶ $R(x, \phi)$, para la rotación sobre el eje x.
- ▶ $R(y, \theta)$, para la rotación sobre el eje y.
- ▶ $R(z, \psi)$, para la rotación sobre el eje z.

cuyas expresiones matriciales corresponden a (3) y (4), con las

siguientes limitaciones en el valor de giro: $\phi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$,

$\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\psi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, las cuales se establecen por el hecho

de que las variaciones angulares (derivadas con respecto al tiempo) en los ángulos de Tait-Bryan pueden dar lugar a funciones discontinuas, lo cual es una condición muy diferente de las variaciones angulares de una aeronave (p , q , r) que son medidas físicamente por giroscopios o unidades de medición

inercial y comúnmente utilizadas en ingeniería aeroespacial para medir las rotaciones y orientación espacial de la aeronave.

En cuanto al aspecto matemático, la matriz de transformación para llevar desde $[p, q, r]^T$ a $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ viene dada según Etkin [29] como:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R_r \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

siendo la forma de la matriz de transformación la que se indica a continuación:

$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

B. Modelado del Cuerpo del Cuatrirotor.

Para la determinación del modelo dinámico de cualquier artefacto aéreo, se hace uso del conjunto de consideraciones de Euler-Lagrange y la presunciones establecidas previamente, recordando que el Lagrangiano = Energía Cinética - Energía Potencial, es decir:

$$L = T - V \quad (7)$$

y la forma general de las ecuaciones de movimiento por el método de Lagrange es:

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_i} \quad (8)$$

donde q_i es el sistema de coordenadas generalizado, y Γ_i es el sistema de fuerzas generalizado.

Según lo establecido en la Figura 3, el sistema inercial de coordenadas fijado en la tierra, E , con la base ortogonal definida por: $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$, y el sistema móvil de coordenadas fijado en el vehículo, B , con la base ortogonal definida por: $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ y como ya ha sido establecido previamente, si cualquier punto del vehículo experimenta tres rotaciones sucesivas, es posible expresar su ubicación espacial en cualquier momento utilizando la expresión:

$$r_{X,Y,Z}(x,y,z) = R(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9)$$

Expresión que al ser derivada con respecto al tiempo nos da las correspondientes velocidades en cada eje.

En cuanto a la expresión para la energía cinética se tiene que considerar los momentos de inercia (elementos de la diagonal principal de la matriz) y los productos de inercia (elementos aledaños a la diagonal principal).

Una de las ventajas de la simetría mecánica del cuatrirotor es que permite ignorar los productos de inercia ya

que la magnitud de estos son por lo general mil veces más pequeños que los momentos de inercia con lo cual la matriz de inercias se simplifica a solamente la diagonal principal. Con esta consideración, la expresión para la energía cinética viene a ser:

$$T = \frac{1}{2} I_{xx} (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin\theta)^2 + \frac{1}{2} I_{yy} (\dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \sin\phi \cos\theta)^2 + \frac{1}{2} I_{zz} (\dot{\theta} \sin\phi - \dot{\psi} \cos\phi \cos\theta)^2 \quad (10)$$

Por otra parte, la expresión para la Energía Potencial viene a ser:

$$V = g \int (-x \sin\theta + y \sin\phi \cos\theta + z \cos\phi \cos\theta) dm(r) \quad (11)$$

sustituyendo ahora en el lagrangiano (8) y considerando la ecuación de movimiento tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \tau_\phi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \tau_\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \tau_\psi \end{aligned} \quad (12)$$

que después de desarrollar de manera sucesiva para cada una de las ecuaciones de: inclinación, elevación, y viraje, se obtiene un conjunto de ecuaciones que pueden ser simplificadas por medio de la expresión de las velocidades y aceleraciones según los ángulos de Euler en el sistema inercial de referencia en función de las velocidades y aceleraciones instantáneas del vehículo según el sistema móvil de coordenadas por medio de la utilización de la matriz de transformación indicada en (6).

Donde el momento total actuando sobre los ejes x, y, z es:

$$\tau_x = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) + J_r \omega_y (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \quad (13)$$

$$\tau_y = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + J_r \omega_x (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4) \quad (14)$$

$$\tau_z = d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \quad (15)$$

Si ahora se considera una pequeña desviación en todos los ángulos del artefacto aéreo, la dinámica de los subsistemas de rotación viene a ser:

$$\ddot{\phi} = \frac{J_r \dot{\theta} (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4)}{I_{xx}} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)}{I_{xx}} \quad (16)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{J_r \dot{\phi} (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4)}{I_{yy}} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_{yy}} \quad (17)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{d(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)}{I_{zz}} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi} \quad (18)$$

C. Modelado del Motor Eléctrico y la Propela.

Para el modelado del motor, se considerará que este es de tipo estándar de corriente continua que obedece a las siguientes ecuaciones:

$$L \frac{di(t)}{dt} = u - R_{mot} i(t) - k_e \omega_m \quad (19)$$

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = M_{em} - M_{fr} \quad (20)$$

donde $M_{em} = k_m \cdot i(t)$ es el par de torsión del motor y M_{fr} es el momento opositor por efecto de la fricción a causa del arrastre de la propela. Donde, si se ignora la inductancia, L , del motor por su pequeño tamaño, tenemos entonces que:

$$i(t) = \frac{u - k_e \omega_m}{R_{mot}} \quad (21)$$

donde:

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = k_m \cdot \frac{u - k_e \omega_m}{R_{mot}} - M_{fr} \quad (22)$$

que es equivalente a:

$$J_m \dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R_{mot}} \omega_m - M_{fr} + \frac{k_m}{R_{mot}} u \quad (23)$$

en el caso de la propela se acople al motor por medio de un engranaje reductor de velocidad, el momento opositor por efecto de la fricción a causa del arrastre aerodinámico queda de la siguiente forma:

$$M_{fr} = \frac{d\omega_m^2}{\eta r} \quad (24)$$

donde η es la eficiencia del engranaje reductor de velocidad y r es la relación de reducción. Lo cual es equivalente a:

$$\omega_{propela} = \frac{\omega_m}{r} \Rightarrow M_{fr} = \frac{d}{\eta r^3} \omega_m^2 \quad (25)$$

La inercia vista por el motor es:

$$J_{propela} \omega_{propela}^2 = \eta \cdot J_{propela \rightarrow motor} \omega_m^2 \\ \Rightarrow J_{propela \rightarrow motor} = \frac{J_{propela}}{\eta r^2} \quad (26)$$

si la inercia de la propela vista por el motor es $J_{propela \rightarrow motor}$. La ecuación del motor puede ser expresada en la siguiente forma:

$$\left(\frac{J_{propela}}{\eta r^2} + J_m \right) \dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R_{mot}} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3} \omega_m^2 + \frac{k_m}{R_{mot}} u \quad (27)$$

Sí J_t es la inercia total vista por el motor, tenemos entonces que:

$$\dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R J_t} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3 J_t} \omega_m^2 + \frac{k_m}{R J_t} u \quad (28)$$

ecuación que puede ser reescrita si se considera que:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} = \frac{k_m^2}{R J_t} \\ \dot{\omega}_m = -\frac{1}{\tau} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3 J_t} \omega_m^2 + \frac{1}{k_m \tau} u \end{cases} \quad (29)$$

Si se considera que la velocidad de rotación de la propela, $\dot{\omega}_m$, experimenta variaciones pequeñas alrededor de la velocidad de operación, la ecuación anterior puede ser linealizada en torno de ω_0 por medio de una serie de Taylor de primer orden, de forma tal que (29) puede ser reescrita con la forma:

$$\dot{\omega}_m = -A \omega_m + B u + C \quad (30)$$

Con: $A = \frac{1}{\tau} + \frac{2d\omega_0}{\eta r^3 J_t}$, $B = \frac{1}{k_m \tau}$, $C = \frac{d\omega_0}{\eta r^3 J_t}$

D. Resumen del Modelo del Cuatrirotor.

Según lo pautado por el desarrollo matemático anterior, se puede establecer que el vector definido por $[x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$ es el contenido de las coordenadas de posición lineal y angular del cuatrirotor en el sistema inercial de coordenadas, y el vector definido por $[u, v, w, p, q, r]^T$ es el contenido de las coordenadas de posición lineal y angular del cuatrirotor en el sistema móvil de coordenadas. De las ecuaciones sobre la dinámica del vehículo en tres dimensiones, se puede establecer que los dos sistemas de referencia se encuentran enlazados por las siguientes relaciones:

$$v = R \cdot v_B \quad (31)$$

$$\omega = T \cdot \omega_B \quad (32)$$

donde $v = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T \in \mathbb{R}^3$, $\omega = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^3$, $v_B = [u, v, w]^T \in \mathbb{R}^3$, $\omega_B = [p, q, r]^T \in \mathbb{R}^3$, con R la matriz del rotacional definida en (3), y T la matriz para las transformaciones angulares según Lee [30].

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \quad (33)$$

de manera tal que el modelo cinemático del cuatrirotor se puede resumir según se indica en (34).

Y el modelo dinámico completo, considerando las fuerzas, del cuatrirotor en el sistema móvil de coordenadas en el que f representa las fuerzas, m la masa del vehículo, I las inercias del sistema, g la aceleración de la gravedad, τ los pares de torsión por efecto de los rotores, τ_w los pares de torsión por efecto de las ráfagas de viento, se indica en (35).

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= w[\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi \sin\theta] - \\
&\quad v[\cos\phi \sin\psi - \cos\psi \sin\phi \sin\theta] + \\
&\quad u[\cos\psi \cos\theta] \\
\dot{y} &= v[\cos\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\psi \sin\theta] - \\
&\quad w[\cos\psi \sin\phi - \cos\phi \sin\psi \sin\theta] + \\
&\quad u[\cos\theta \sin\psi] \\
\dot{z} &= w[\cos\phi \cos\theta] - u[\sin\theta] + v[\cos\theta \sin\theta] \\
\dot{\phi} &= p + r[\cos\phi \tan\theta] + q[\sin\phi \tan\theta] \\
\dot{\theta} &= q[\cos\phi] - r[\sin\phi] \\
\dot{\psi} &= r \frac{\cos\phi}{\cos\theta} + q \frac{\sin\phi}{\cos\theta}
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
-mg[\sin\theta] + f_{wx} &= m(\dot{u} + qw - rv) \\
mg[\cos\theta \sin\phi] + f_{wy} &= m(\dot{v} - pw + ru) \\
mg[\cos\theta \cos\phi] + f_{wz} - f_t &= m(\dot{w} + pv - qu) \\
\tau_x + \tau_{wx} &= \dot{p}I_x - qrI_y + qrI_z \\
\tau_y + \tau_{wy} &= \dot{q}I_y + prI_x - prI_z \\
\tau_z + \tau_{wz} &= \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y
\end{aligned} \tag{35}$$

V. MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADO.

Según lo establecido en el resumen anterior, se define el vector de espacio de estado que describe la cinemática y la dinámica del vehículo aéreo como:

$$X = [\phi, \theta, \psi, p, q, r, u, v, w, x, y, z]^T \in \mathbb{R}^{12} \tag{36}$$

si ahora se aplican las leyes del movimiento de Newton se pueden obtener dos formas alternativas del modelo dinámico del cuadricóptero, muy útiles para el estudio del control del vehículo.

La primera, relacionada con (34) se puede expresar de forma matricial como se indica a continuación:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}_B = mg\hat{\mathbf{e}}_z - f_t \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \tag{37}$$

con lo que la segunda, relacionada con (35) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{f_t}{m} [\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi \sin\theta] \\
\ddot{y} &= -\frac{f_t}{m} [\cos\phi \sin\psi \sin\theta - \cos\psi \sin\phi] \\
\ddot{z} &= g - \frac{f_t}{m} [\cos\phi \cos\theta]
\end{aligned} \tag{38}$$

Si ahora se toma en cuenta la consideración de Das [31] en la que el vehículo solo experimenta pequeños cambios en sus ángulos de orientación durante las maniobras a causa de su baja velocidad de desplazamiento, se puede realizar la siguiente simplificación: $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T = [p, q, r]^T$, de manera tal que el modelo dinámico del cuadricóptero en el sistema inercial de coordenadas

viene a ser:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{f_t}{m} [\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi \sin\theta] \\
\ddot{y} &= -\frac{f_t}{m} [\cos\phi \sin\psi \sin\theta - \cos\psi \sin\phi] \\
\ddot{z} &= g - \frac{f_t}{m} [\cos\phi \cos\theta] \\
\ddot{\phi} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\tau_x}{I_x} \\
\ddot{\theta} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\tau_y}{I_y} \\
\ddot{\psi} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\tau_z}{I_z}
\end{aligned} \tag{39}$$

lo cual permite redefinir el vector de estado a la siguiente forma:

$$X = [x, y, z, \phi, \theta, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, p, q, r]^T \in \mathbb{R}^{12} \tag{40}$$

A. Modelo Lineal en el Espacio de Estado.

Si se define la variable u como el vector de control con la siguiente forma: $u = [f_t, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T \in \mathbb{R}^4$. El procedimiento de linealización se desarrollará alrededor de un punto de equilibrio \bar{x} , que para una entrada definida \bar{u} es la solución del sistema de ecuaciones algebraicas. Lo que también puede ser definido como el conjunto de valores del vector de espacio de estado que para una entrada constante es la solución del sistema algebraico de ecuaciones, es decir:

$$\hat{\mathbf{f}}(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \tag{41}$$

Como la función $\hat{\mathbf{f}}$ en (41) es no lineal, los problemas relacionados con la existencia o no de una única solución al sistema de ecuaciones se incrementa ampliamente.

En particular, para el sistema de ecuaciones ya establecido y que definen el comportamiento del cuadricóptero, es muy difícil de encontrar una solución cerrada por causa de que las funciones trigonométricas se encuentran relacionadas unas con otras de una manera no elemental. Por esta razón, la linealización se desarrolla para un modelo simplificado donde las oscilaciones en la postura sean pequeñas, de manera tal que la simplificación se fundamenta en la aproximación de la función senoidal a su argumento y la función cosenoidal a la unidad.

B. Linealización en el Espacio de Estado.

Como se indicó anteriormente, a objeto de realizar la linealización es imprescindible definir un punto de equilibrio, el cual puede ser el que se indica a continuación:

$$\bar{x} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]^T \in \mathbb{R}^{12} \tag{42}$$

ya que de las ecuaciones indicadas en (41), se puede demostrar que la condición de punto de equilibrio para (42) se obtiene para un valor constante de entrada definido por:

$$\bar{u} = [mg, 0, 0, 0]^T \in \mathbb{R}^4 \tag{43}$$

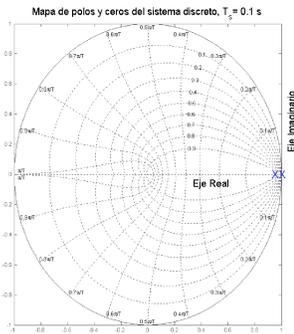


Figura 8 Mapa de polos y ceros del sistema discreto.

En la Figura 18, se puede apreciar la respuesta del sistema discretizado con un periodo de muestreo de 0.1 segundos y en lazo abierto ante una entrada escalón unitario.

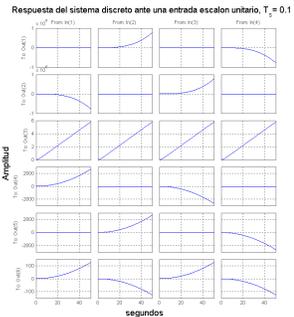


Figura 9 Respuesta del sistema discreto a una entrada escalón unitario.

En la Figura 10, se observa la respuesta que suministra MATLAB cuando se le consulta sobre el valor de los polos del sistema en tiempo discreto, lazo abierto, y sobre los rangos de las matrices de controlabilidad y observabilidad a efectos de verificar si las consideraciones de linealización permiten controlar al vehículo y observar de manera directa sus variables de estado.

```

POLOS DEL SISTEMA DISCRETO:
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
0.9512
0.9512
0.9512
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000

Rango de la matriz de controlabilidad en discreto=
ans =
12

Rango de la matriz de observabilidad en discreto=
ans =
12

```

Figura 10 Respuesta de MATLAB sobre la ubicación de los polos y rangos de las matrices.

VII. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN.

En la Figura 5, se observa que el sistema continuo, linealizado, y en lazo abierto tiene solamente dos polos, sistema

de segundo orden, y uno de los polos se encuentra sobre el origen con lo cual se establece que es un sistema marginalmente estable.

En la Figura 6, a diferencia de lo inferido de la Figura 5, se observa que el sistema en lazo abierto no es de segundo orden ni marginalmente estable, ya que varias de las respuestas del sistema ante una entrada del tipo escalón unitario son no acotadas.

En la Figura 7, se aprecia la respuesta de MATLAB al preguntarse tanto por el valor de los polos del sistema en lazo abierto, como por el rango de las matrices de controlabilidad y observabilidad. En cuanto al valor de los polos del sistema se aprecia que son nueve los que se encuentran sobre el origen con lo cual se establece sin lugar a dudas que el sistema es inestable por naturaleza propia ya que la multiplicidad de polos sobre el eje imaginario es mayor a uno. En cuanto a los rangos de las matrices se aprecia que la respuesta es 12 para cada una de ellas; lo cual indica que el número de ecuaciones linealmente independientes es igual al número de variables de estado, razón por la cual se puede establecer que el sistema es controlable y observable en lazo cerrado.

Para el caso de la Figura 8, se ha discretizado el sistema continuo con un periodo de muestreo de 0.1 segundo para una adecuada simulación en MATLAB, apreciándose que este modelo en lazo abierto tiene polos sobre el círculo unitario lo cual indica que el sistema discreto en lazo abierto es inestable por naturaleza propia.

En la Figura 9, se comprueba la inestabilidad del sistema discreto en lazo abierto ya que varias de las respuestas ante una entrada del tipo escalón unitario son no acotadas.

En la Figura 10, se aprecia la respuesta de MATLAB al preguntarse tanto por el valor de los polos del sistema discreto en lazo abierto, como por el rango de las matrices de controlabilidad y observabilidad. En cuanto al valor de los polos del sistema se aprecia que son nueve los que se encuentran sobre el círculo unitario con lo cual se establece sin lugar a dudas que el sistema es inestable por naturaleza propia. En cuanto a los rangos de las matrices se aprecia que la respuesta es 12 para cada una de ellas; lo cual indica que el sistema discreto es observable y controlable en lazo cerrado.

VIII. CONCLUSIONES

a) A partir de las ecuaciones de Euler fue posible desarrollar el modelo matemático que describe el comportamiento y desempeño del cuadricóptero que se espera simular y controlar en su trayectoria de vuelo.

b) Linealizando las ecuaciones matemáticas en un sistema de variables de estado fue posible determinar tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto los rangos de las matrices de controlabilidad y observabilidad, con lo cual se determinó que en

ambos dominios de tiempo era posible observar las variables de estado del sistema aeronáutico y controlar su trayectoria de vuelo.

c) Utilizando el programa de análisis numérico MATLAB fue posible desarrollar el sistema de simulación, en el cual para una trayectoria tridimensional simple conformada por solamente dos coordenadas (punto de partida, punto de llegada) y sin ninguna acción de control (lazo abierto) se determina que el sistema es inestable por naturaleza propia ya que es subactuado, más sin embargo, el análisis matricial del modelo por medio del álgebra lineal indica que el sistema tiene observabilidad y controlabilidad completa, con lo cual se determina que en lazo cerrado el sistema debe ser controlable.

d) Para el correcto desempeño del cuadricóptero en el seguimiento de una trayectoria espacial cualquiera formada por n puntos, es imprescindible la utilización de un controlador que ajuste las acciones de maniobra para lograr el seguimiento de esta.

REFERENCIAS

- [1] S. Raza and Wail Gueaieb, Intelligent Flight Control of an Autonomous Quadrotor, Motion Control, InTech, University of Ottawa, Canada, 2010. Disponible en: http://cdn.intechopen.com/pdfs/6587/intech-intelligent_flight_control_of_an_autonomous_quadrotor.pdf. Revisado: 06 de Junio del 2016.
- [2] Eduard Santamaria, Florian Segor, Igor Tchouchenkov, Rapid Aerial Mapping with Multiple Heterogeneous Unmanned Vehicles. Disponible en: <http://www.iscramlive.org/ISCRAM2013/files/211.pdf>. Revisado: 06 de Junio del 2016.
- [3] Dron para rescate marítimo. Disponible en: <http://www.wired.co.uk/article/iranian-rescue-robot>. Revisado: 06 de Junio del 2016.
- [4] Alex Kushleyev, Daniel Mellinger, Vijay Kumar, GRASP Lab, University of Pennsylvania. A Swarm of Nano Quadrotors. Disponible en: <http://www.youtube.com/watch?v=YQIMGV5vtd4>. Revisado: 06 de Junio del 2016.
- [5] Hongning Hou, Jian Zhuang, Hu Xia, Guanwei Wang, and Dehong Yu. A simple controller of minisize quad-rotor vehicle. In Mechatronics and Automation (ICMA), 2010 International Conference on, pages 1701-1706, 2010.
- [6] Jinhyun Kim, Min-Sung Kang, and Sangdeok Park. Accurate modeling and robust hovering control for a quadrotor vtol aircraft. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 57(1-4):9-26, 2010. ISSN 0921-0296. doi: 10.1007/s10846-009-9369-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10846-009-9369-z>.
- [7] Randal W. Beard. Quadrotor Dynamics and Control. Lecture notes. Brigham Young University. Disponible en: <http://scholarsarchive.byu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2324&context=facpub>. Revisado: 06 de Junio del 2016.
- [8] Teppo Luukkainen, Modelling and control of quadcopter, Independent research project in applied mathematics, Aalto University, Espoo, Finland 2011. Disponible en: http://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf. Revisado: 06 de Junio del 2016.
- [9] Samir Bouabdallah, Roland Siegwart. Full Control of a Quadrotor. Disponible en: <https://e-collection.library.ethz.ch/eserv.php?pid=eth:7848&dsID=eth-7848-01.pdf>. Revisado: 06 de Junio del 2016.
- [10] G. Hoffmann, Huang, S. Waslander, and C. Tomlin, "Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment," in Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2007, pp. 1–20.
- [11] R. Goela, S. Shahb, N. Guptac, and N. Ananthkrishnanc, "Modeling, simulation and flight testing of an autonomous quadrotor," Proceedings of ICEAE, 2009.
- [12] B. Erginer and E. Altug, "Modeling and pd control of a quadrotor vtol vehicle," in Intelligent Vehicles Symposium, 2007 IEEE. IEEE, 2007, pp. 894–899.
- [13] R.V. Jategaonkar. Flight vehicle system identification: a time domain methodology. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [14] I.D. Cowling, O.A. Yakimenko, J.F. Whidborne, and A.K. Cooke. A prototype of an autonomous controller for a quadrotor uav. In European Control Conference, pages 1–8, 2007.
- [15] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In International Conference on Intelligent Robots and Systems 2004, volume 3, pages 2451 – 2456 vol.3, 2004.
- [16] P. Pounds, R. Mahony, and P. Corke. Modelling and control of a quadrotor robot. In Australasian conference on robotics and automation 2006, Auckland, NZ, 2006.
- [17] B. Whitehead and S. Bieniawski. Model Reference Adaptive Control of a Quadrotor UAV. In Guidance Navigation and Control Conference 2010, Toronto, Ontario, Canada, 2010. AIAA.
- [18] J.J. Craig, P. Hsu, and S.S. Sastry. Adaptive control of mechanical manipulators. The International Journal of Robotics Research, 6(2):16, 1987.
- [19] Becker, M.; Bouabdallah, S.; Siegwart, R. (2006). Desenvolvimento de um Controlador de Desvio de Obstáculos para um Mini-Helicóptero Quadrirotor Autônomo 1ª Fase: Simulação. In proc. of CBA 2006 - Congresso Brasileiro de Automática, Salvador - BA, Brazil, Vol. 1. pp. 1201-1206.
- [20] P. Pounds, R. Mahony, J. Gresham, P. Corke, and J. Roberts. Towards Dynamically-Favourable Quad-Rotor Aerial Robots. 2004.
- [21] A. Mokhtari, A. Benallegue, and B. Daachi. Robust feedback linearization and gh8 controller for a quad rotor unmanned aerial vehicle. Journal of Electrical Engineering, 57(1):20–27, 2006.
- [22] E. Courses and T. Surveys. Robust low altitude behavior control of a quadrotor rotorcraft through sliding modes. pages 1–6, 2007.
- [23] Beard, Randal, "Quadrotor Dynamics and Control Rev 0.1" (2008). All Faculty Publications. Paper 1325. Disponible en: <http://scholarsarchive.byu.edu/facpub/1325>. Revisado: 28 de Junio del 2016.
- [24] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. Robotics. McGraw-Hill.
- [25] D. Lee, T. Burg, D. Dawson, D. Shu, B. Xian, and E. Tatlicioglu, "Robust tracking control of an underactuated quadrotor aerial-robot based on a parametric uncertain model", in Systems, Man and Cybernetics, 2009. SMC 2009. IEEE International Conference on, 2009, pp. 3187–3192.
- [26] G. Done and D. Balmford, Bramwell's Helicopter Dynamics. Oxford Butterworth-Heinemann, 2001.
- [27] P. Mullhaupt, Analysis and Control of Underactuated Mechanical Nonminimum-phase Systems. PhD thesis, EPFL, 1999.
- [28] H. Goldstein et al., Classical Mechanics. Addison Wesley, 2002.
- [29] B. Etkin and L. Reid, Dynamics of Flight: Stability and Control. John Wiley and Sons, 1996.
- [30] D. Lee, T. Burg, D. Dawson, D. Shu, B. Xian, and E. Tatlicioglu, "Robust tracking control of an underactuated quadrotor aerial-robot based on a parametric uncertain model", in Systems, Man and Cybernetics, 2009. SMC 2009. IEEE International Conference on, 2009, pp. 3187–3192.
- [31] A. Das, K. Subbarao, and F. Lewis. Dynamic inversion with zero-dynamics stabilisation for quadrotor control. Control Theory & Applications, IET, 3(3):303–314, 2009.